# Gráfelmélet

1) a) Döntse el az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Válaszát írja a táblázatba! (4 pont)

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros:

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és mégis kitölti a fenti táblázatot, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza? (3 pont)

c) Tagadja az alábbi mondatot:
„Nincs olyan szerelem, ami el nem múlik” (*Népdalgyűjtés*) (3 pont)

d) Fogalmazzon meg egy olyan szöveges feladatot, amelynek a megoldása így számítható ki: $\binom{17}{2}$. (3 pont)

2) a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (6 pont)

- Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.
- Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

b) Az $A$, $B$, $C$, $D$ és $E$ pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő? (10 pont)

3) Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást:

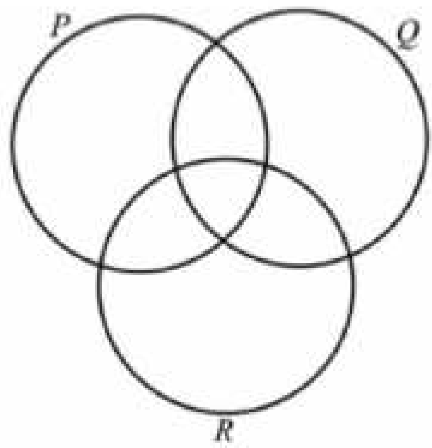
*Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.*

a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja! (2 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja! (4 pont)

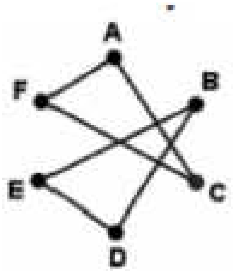
Tekintsük a következő halmazokat:

$P$ = {összefüggő gráfok}, $Q$ = {egyszerű gráfok}, $R$ = {kört tartalmazó gráfok}.

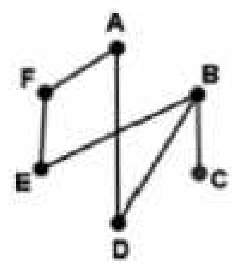



c) Helyezze el az alábbi gráfok ábrájának sorszámát a fenti halmazábrán a megfelelő helyre! (4 pont)

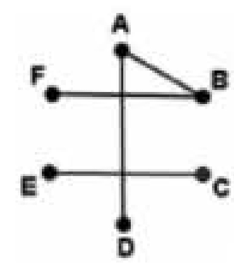
d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelő helyre! (3 pont)



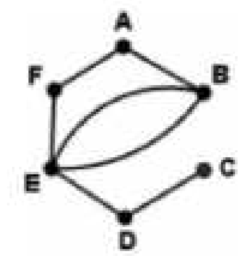

*1. ábra*



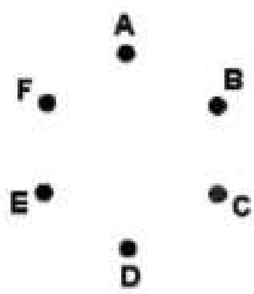

*2. ábra*




*3. ábra*




*4. ábra*




*5. ábra*

4) a) Határozza meg az alábbi kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszait indokolja! (8 pont)

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

III. Van olyan fagráf amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

Egy hatfős társaság tagjai $A, B, C, D, E$ és $F$. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy $A$-nak legalább annyi ismerőse van, mint $B$-nek, $B$-nek legalább annyi ismerőse van, mint $C$-nek, és így tovább, $E$-nek legalább annyi ismerőse van, mint $F$-nek.

b) Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket! (8 pont)

5) A $H$ halmaz egy nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a $H$ elemeire vonatkozik: Ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának fokszáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a $H$ elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)

Az $ABCDE$ konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen.

c) Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.) (5 pont)

Egy négypontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezünk zöldre (teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négypontú körének élei! (5 pont)

6) a) Legyen $G$ egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy $G$ csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3. (4 pont)

b) Az $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az $A$ csúcsból indul ki! (6 pont)

c) Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.) (6 pont)

7)

a) *Ha $a\,|\,b$ igaz, akkor $a\,|\,b^2$ is teljesül* ($a$ és $b$ pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a\,|\,b$ azt jelenti, hogy az $a$ egész szám osztója a $b$ egész számnak.) (3 pont)

b) Hány olyan $n$ pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan $p$ (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő? (7 pont)

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf! (2 pont)

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan! (4 pont)

8) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.

a) Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)

c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)

9) Aladár, Béla, Csaba, Dani és Ernő szombat délutánonként együtt teniszeznek. Mikor megérkeznek a teniszpályára, mindegyik fiú kezet fog a többiekkel.

a) Hány kézfogás történik egy-egy ilyen közös teniszezés előtt? (3 pont)

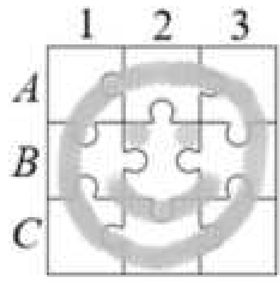
Legutóbb Dani és Ernő együtt érkeztek a pályára, a többiek különböző időpontokban érkeztek.

b) Hány különböző sorrendben érkezhettek ezen alkalommal? (3 pont)

c) A fiúk mindig páros mérkőzést játszanak, kettő-kettő ellen. (Egy páron belül a játékosok sorrendjét nem vesszük figyelembe, és a pálya két térfelét nem különböztetjük meg.)

Hány különböző mérkőzés lehetséges? (6 pont)

10) Az ábrán egy $3\times3$-as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A1$, $A2$, ... , $C3$) a puzzle-elemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalban) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.




a) Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét! (3 pont)

b) Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll! (4 pont)

c) A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő! (2 pont)

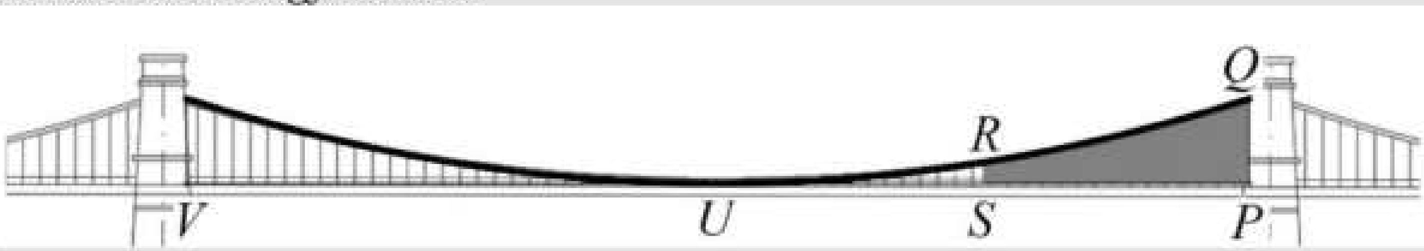
d) Hányféleképpen lehet a puzzle-elemek közül hármat úgy kiválasztani, hogy ezek a teljesen kirakott képben kapcsolódjanak egymáshoz (azaz mindhárom képrészlet közvetlenül kapcsolódjék legalább egy másikhoz a kiválasztottak közül)? (Az elemek kiválasztásának sorrendjére nem vagyunk tekintettel.) (7 pont)

11) a) Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!
Van olyan $G_1$, illetve $G_2$ fagráf, amelyre igaz, hogy a $G_2$ csúcsainak száma kétszerese a $G_1$ csúcsai számának, és a $G_2$ éleinek száma is kétszerese a $G_1$ élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.) (3 pont)

Az *A, B, C, D, E, F* kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* vagy a *B* cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet? (6 pont)

Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.




A híd két támpillérének *PV* távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a *PV* felezőpontja (*U*), a tengelye pedig a *PV* felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ=16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS=50$ méter. A tervek szerint a *QR* íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített *PQRS* területet fedi majd be (*RS* merőleges *PS*-re).

b) Hány $m^2$ területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező? (7 pont)

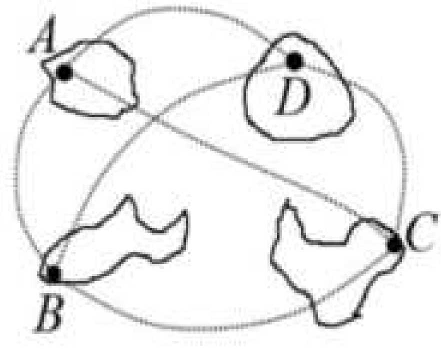
12) Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha különbségük páros szám (de egyik számjegyet se kötjük össze önmagával). Így egy ötpontú gráfot kapunk.

a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk. (4 pont)

Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatnak bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az *ábra* azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.)




A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg? (7 pont)

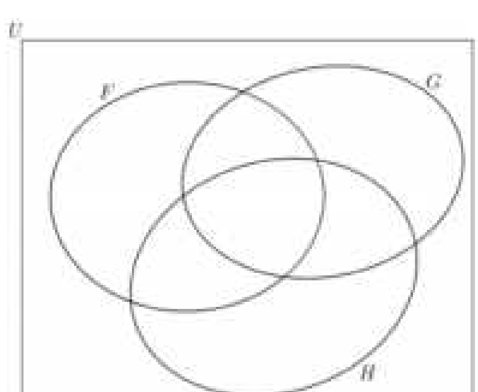
A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni.

c) Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve? (5 pont)

13) Legyen az $U$ alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az $F$ halmaz az $U$ elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a $G$ halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a $H$ halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az $U$-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely $K, L, M, N, P, Q$ épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha $K$ és $L$ épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.) (4 pont)

Megrajzoltuk a $ABCDE$ konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az $A, B, C, D, E$ pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

14) Annának az IWIW-en 40 ismerőse van (Az IWIW weboldalon lehetőség van az egymást ismerő emberek kapcsolatfelvételére. Ebben a feladatban minden ismertséget kölcsönösnek tekintünk.)

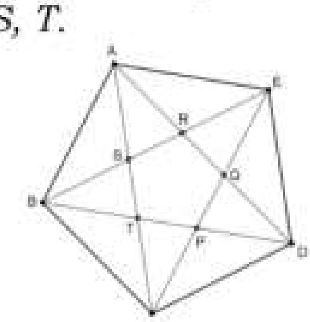
Anna ismerőseinek mindegyike Anna minden többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer.

a) A szóba került 41 ember között összesen hány ismertség áll fenn? (5 pont)

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? (5 pont)

c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást? (6 pont)

15) Megrajzoltuk az $ABCDE$ szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: $P, Q, R, S, T$.



a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az $ABCDE$ ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki?(8 pont)

b) Tudjuk, hogy az $ABCQ$ négyszög területe **120 cm²**. Mekkora az $ABCDE$ ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg! (4 pont)

c) Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válaszra!

1.állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.

2.állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör.

(4 pont)

16) Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$f(x) = (x+4)(2-x)$

$g(x) = x+4$

$h(x) = x^2 - 4$

$i(x) = |x| - 4$

a) Határozza meg az $f$ és $g$ függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét! (7 pont)

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot! (4 pont)

A valós számok halmazán értelemezett $k$ függvény zérushelye -5 és 3, az $m$ függvény zérushelyei 3 és -3, az $n$ függvény zérushelyei pedig 5 és -5.

A $p$ elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x) = x + c$, ahol $c$ egy valós szám.

c) Hányféleképpen válaszható meg a $c$ konstans értéke úgy, hogy a $k$, $m$, $n$ és $p$ függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen? (5 pont)

17) Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az *A, B, C, D, E, F* hattagú társaság mely tagjai ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálója (ismeretségi gráfja). (Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálója akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.) A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy *A*-nak 5, *B*-nek 4, *C*-nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán *D, E, F* egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ.

a) Hányféle lehet a *D, E, F* csoport ismeretségi hálója?

A friss bizonyítékok szerint a *D, E, F* csoportban mindenki ismeri a másik két személyt. (3 pont)

b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az *A, B, C, D, E, F* hattagú társaság ismeretségi hálója? (9 pont)

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben *A* és *B* együtt nincs jelen.

c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni? (4 pont)